ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Образцы олимпиадных заданий для муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2013/2014 учебном году

Москва 2013

Типовые задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников

6 класс

6.1. Замените в примере на сложение десятичных дробей каждую звездочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство:

$$0,**+0,**+0,**+0,**=1.$$

6.2. Маша ездит на велосипеде вдвое быстрее своего младшего брата Васи, а на самокате вдвое медленнее, чем он на велосипеде. Маша и Вася, стартовав вместе, поехали на велосипедах, и через две минуты Маша пересела на самокат. Через какое время Вася догонит Машу?

6.3. Участок 40×50 метров выделен под огороды и обнесен оградой снаружи. Как установить внутри участка 6 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?

6.4. Ученики 6 класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 5 воздушных шариков, а у каждой девочки – по 4 шарика. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики друг у друга. В итоге каждая девочка проколола по 1 шарику, а каждый мальчик – по 2 шарика. Дима сосчитал все оставшиеся шарики, и у него получилось 100. Докажите, что Дима ошибся.

6.5. Одиннадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие – всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

7 класс

7.1. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

7.2. В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок, в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

7.3. Для нескольких точек, расположенных на прямой, вычисляются расстояния между каждыми двумя из них (например, для четырёх точек таких расстояний будет шесть). Отметьте на прямой восемь точек так, чтобы расстояние между крайними точками было равно 7, а среди расстояний между точками ровно три раза встречалось расстояние 1, ровно два раза – расстояние 2, ровно пять раз – расстояние 3.

7.4. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 32, а Вася – 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

7.5. За круглым столом сидит 11 человек – лжецов и рыцарей (рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет). Каждому из них раздали по две карточки. Известно, что карточки только синие и красные. Каждый сказал: «У меня одноцветные карточки». После этого каждый передал одну из своих карточек соседу справа. Могли ли все после этого сказать: «У меня разноцветные карточки»?

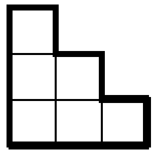
8 класс

8.1. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

8.2. От шоссе к четырем поселкам A, B, C, D последовательно отходят четыре дороги. Известно, что путь по дороге-шоссе-дороге от A до B равен 9 км, от A до C – 13 км, от B до C – 8 км, от B до D – 14 км. Найдите длину такого пути от A до D.

8.3. Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник – по два урока, , в каждую пятницу – по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока? (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни – учебными. В сентябре 30 дней.)

8.4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Оказалось, что четырехугольник $FBDE$ – ромб. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

8.5. Клетчатая доска 100×100 разрезана на шестиклеточные «лесенки» (см. рис.) и прямоугольники 2×1. Может ли оказаться, что «лесенок» ровно 333? (Лесенки и прямоугольники могут быть повёрнуты как угодно.) 

9 класс

9.1. Ненулевые числа x, y, z, t таковы, что

$$\left(x+\frac{1}{yzt}\right)\left(y+\frac{1}{ztx}\right)\left(z+\frac{1}{txy}\right)\left(t+\frac{1}{xyz}\right) > 0.$$

Докажите, что $xyzt > 0$.

9.2. Из произведения трех последовательных натуральных чисел вычли их сумму и получили нечетное число N. Докажите, что число N является произведением каких-то трех последовательных нечетных чисел.

9.3. На городской олимпиаде по математике каждому участнику присваивается шифр – произвольное число, оканчивающееся номером класса, в котором он учится. В олимпиаде по 6 и 7 классам приняли участие 75 детей, и оказалось, что сумма шифров шестиклассников равна сумме шифров семиклассников. На следующий год в олимпиаде по 7 и 8 классам приняли участие эти же 75 ребят. Могли ли суммы шифров этих теперь уже семи- и восьмиклассников опять оказаться равными? Обоснуйте свой ответ. (Шифры следующего года не связаны с шифрами предыдущего.)

9.4. Точки A_1, B_1, C_1 – соответственно середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – соответственно центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$. Докажите, что O_4 – точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

9.5. В классе на День защитника Отечества девочки принесли подарки для своих одноклассников-мальчиков: одна – 1 подарок, вторая – 2 подарка, третья – 3 подарка и т.д. Оказалось, что каждый мальчик получил одинаковое число подарков.

На 8 Марта мальчики поздравляли одноклассниц и принесли: первый – 1 подарок, второй – 2 подарка, третий – 3 подарка и т.д. Также оказалось, что каждая девочка получила одинаковое число подарков. Докажите, что мальчиков или девочек (или и тех и других) в классе нечетное число.

10 класс

10.1. Парабола $y = ax^2$ высекает на прямых $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ три отрезка. Докажите, что из этих отрезков можно сложить прямоугольный треугольник.

10.2. Найдите все такие пары действительных чисел x и y ($y \neq 0$), что числа $x + \frac{1}{y}$, $2x + \frac{1}{y^2}$ и $3x + \frac{1}{y^3}$ являются последовательными натуральными числами (именно в этом порядке).

10.3. Найдите все тройки различных простых чисел, попарные разности которых (из большего числа вычитается меньшее) – также три простых числа.

10.4. На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны точки A_1 и C_1 соответственно так, что $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$. Биссектриса BL треугольника ABC пересекает отрезок A_1C_1 в точке K. Докажите, что $A_1K \cdot CL = C_1K \cdot AL$.

10.5. Вершины правильного 11-угольника раскрашены в два цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$?

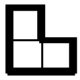
11 класс

11.1. Числа x, y, z и t таковы, что $x > y^3$, $y > z^3$, $z > t^3$, $t > x^3$. Докажите, что $xyzt > 0$.

11.2. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит число $a > 1$ и его квадрат. Докажите, что она также содержит и куб числа a.

11.3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$ имеют ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

11.4. Пусть α, β, γ – плоские углы трехгранного угла. Докажите, что числа $\sin\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\beta}{2}, \sin\frac{\gamma}{2}$ являются длинами сторон некоторого треугольника.

11.5. В клетках квадрата 7×7 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

Ответы и решения.

6 класс

6.1. Существуют два примера с точностью до перестановки слагаемых: $0{,}22+0{,}23+0{,}23+0{,}32=1$ и $0{,}22+0{,}22+0{,}23+0{,}33=1$.

6.2. Ответ. Через 4 минуты.

Разность между скоростями Маши и Васи, когда Маша едет на велосипеде, вдвое больше, чем разность между скоростями Васи и Маши, когда она едет на самокате. Поэтому на то, чтобы догнать Машу, Васе потребуется вдвое больше времени, чем она от него уезжала.

6.3. Один из возможных примеров показан на рисунке 1. Ограды имеют длину 20 м, их концы отмечены жирными точками.

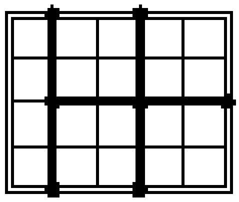


Рис. 1

6.4. Будем считать, что дети прокалывали свои шарики. От этого предположения общее количество проколотых шариков не изменится. Тогда, когда дети пришли на праздник, у каждого мальчика будет по $5-2=3$ шарика, и у каждой девочки будет по $4-1=3$ шарика. То есть у каждого из детей будет по 3 шарика. Но 100 на 3 не делится, поэтому у всех детей не могло остаться ровно 100 шариков.

6.5. Ответ. Не могли.

Рассмотрим двух шестиклассников, стоящих рядом. Про карточки, которые правый из них (П) получил от левого (Л), они дали разные ответы. Значит, один из них говорит правду, а другой – лжет. Пусть следующий по кругу за П – шестиклассник К. Тогда в паре П – К также один говорит правду, а другой – лжет. И так далее. Значит, говорящие правду и ложь – чередуются. Поэтому их должно быть четное количество.

7 класс

7.1. Ответ. Например, 99, 100 и 101.

Этот пример можно получить, заметив, что $9999=99\cdot101$.

Замечание. Кроме этого, существует ровно один другой пример: 504, 505, 506.

7.2. Ответ. 24 ученика.

Пусть в шахматный кружок ходит x ребят, тогда в него не ходит $2x$ ребят. Итак, всего в классе $3x$ ребят, и количество учеников в классе делится на 3. Аналогично, пусть в шашечный кружок ходит y ребят, тогда в него не ходит $3y$ ребят. Итак, всего в классе $4y$ ребят, и количество учеников в классе делится на 4.

Число учеников в классе делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное подходящее число, большее 20 и меньшее 30, это 24.

7.3. Пусть A, B, C, D, E, F, G, H – подряд идущие отмеченные точки. Подходит, в частности, следующий пример: $AB = 1$, $BC = 1/2$, $CD = 3/2$, $DE = 1$, $EF = 1/2$, $FG = 3/2$, $GH = 1$ (см. рис. 2).

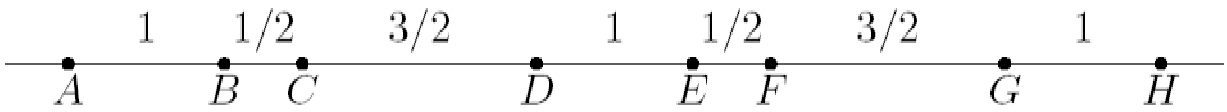


Рис. 2

Замечание. Существуют и другие примеры.

7.4. Ответ. Вася.

После каждого забега разность количества конфет, полученных любыми двумя из присутствовавших на уроке школьников, делится на 3 (эта разность равна 0 или 3). Значит, и в конце четверти разность количеств конфет, полученных любыми двумя из посетивших все уроки физкультуры школьников, делится на 3. А из данных чисел 29, 32, 37 разность, делящуюся на 3, дают только числа 29 и 32. Значит, пропустил урок тот школьник, который заработал 37 конфет.

7.5. Ответ. Не могли.

Рассмотрим любого из сидящих за столом. Он изменил ответ после того, как отдал одну карточку и получил другую. Поэтому вне зависимости от того, является он рыцарем или лжецом, он отдал карточку одного цвета, а получил другого. Итак, цвета переданных карточек чередуются, и поэтому их количество должно быть четным. Однако 11 – число нечетное, поэтому описанная в условии ситуация невозможна.

8 класс

8.1. Ответ. Уменьшится на 2013.

Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1) = xy + y - x - 1$. Произведение увеличилось на 2011, то есть $y - x - 1 = 2011$ или $y - x = 2012$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1) = xy - y + x - 1$. Заметим, что $xy - y + x - 1 = xy - (y-x) - 1 = xy - 2012 - 1 = xy - 2013$. То есть произведение уменьшилось на 2013.

8.2. Ответ. 19 км.

Пусть длина дороги от шоссе до поселка B равна b. Путь от A до C можно заменить на более длинный – через поселок B. Он длиннее на удвоенный путь от шоссе до B. Значит, $2b = 9 + 8 - 13$, откуда $b = 2$.

Теперь заменим путь от A до D более длинным – через поселок B. Его длина равна $9 + 14 = 23$. Значит, длина пути от A до D равна $23 - 2 \cdot 2 = 19$.

8.3. Ответ. Не могло.

Предположим, что Вася прогулял ровно 64 урока. Заметим, что сентябрь содержит четыре полных недели и еще два подряд идущих дня. За одну полную неделю Вася прогулял $1+2+3+4+5=15$ уроков. То есть за четыре недели Вася прогулял ровно 60 уроков, а за два подряд идущих дня – 4 урока. Но если среди этих двух дней есть выходной, то оставшийся день – понедельник или пятница, что не подходит. Если же оба дня учебные, то Вася должен был прогулять нечетное количество уроков (3, 5, 7 или 9), что также не подходит. Значит, Вася не мог прогулять ровно 64 урока.

8.4. Диагонали ромба $FBDE$ делятся точкой пересечения O пополам и взаимно перпендикулярны. Поскольку прямые DF и AC перпендикулярны BE, они параллельны между собой (см. рис.3). Значит, прямая DF является средней линией в треугольниках ABE и CBE, то есть точки D и F – середины сторон BC и AB соответственно. Таким образом, высоты AD и CF являются медианами, откуда $AB = AC$ и $BC = AC$, то есть треугольник ABC – равносторонний.

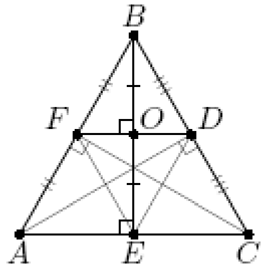


Рис. 3

8.5. Ответ. Не может.

Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски в два цвета – чёрный и белый. Тогда клеток чёрного и белого цвета будет одинаковое количество. Заметим, что в каждом прямоугольнике 2×1 будет по одной чёрной и белой клетке. Это означает, что суммарно во всех лесенках количество клеток чёрного и белого цвета должно быть одинаковым. Но в каждой лесенке будет либо 4 белых и 2 чёрных клетки, либо 4 чёрных и 2 белых клетки. Пусть количество лесенок первого вида x, а второго вида y. Тогда суммарное количество белых клеток в лесенках равно $4x+2y$, а чёрных – $2x+4y$. Отсюда $4x+2y=2x+4y$, то есть $x=y$. Это означает, что общее количество лесенок $2x$ чётно, и поэтому не может равняться 333.

9 класс

9.1. Первое решение. Вынесем из каждой скобки множитель, равный первому слагаемому в этой скобке. Тогда данное произведение примет вид

$$xyzt\left(1+\frac{1}{xyzt}\right)^4.$$

Чётная степень ненулевого числа положительна, поэтому $\left(1+\frac{1}{xyzt}\right)^4>0$. Разделив исходное неравенство на это число, получаем, что $xyzt>0$.

Второе решение. Приведём сумму в каждой скобке к общему знаменателю:

$$\frac{xyzt+1}{yzt}\cdot\frac{xyzt+1}{ztx}\cdot\frac{xyzt+1}{txy}\cdot\frac{xyzt+1}{xyz}=\frac{(xyzt+1)^4}{(xyzt)^3}.$$

Из положительности этой дроби следует положительность знаменателя, то есть положительность искомого произведения.

9.2. Пусть $m-1, m, m+1$ – исходные числа. Тогда $N=(m-1)m(m+1)-((m-1)+m+(m+1))=m(m^2-1)-3m=m(m^2-4)=(m-2)m(m+2)$. Числа $m-2, m, m+2$ либо последовательные четные, либо последовательные нечетные числа. Но так как N – нечетное, то и числа $m-2, m, m+2$ – нечетные, что и требовалось.

9.3. Ответ. Не могли.

Предположим, что такое могло случиться. Сумма шифров шестиклассников – это сумма чисел, оканчивающихся на 6, то есть четных чисел. Поэтому она четна. Тогда и сумма шифров семиклассников в первый год – четное число. Но это сумма нечетных чисел (оканчивающихся на 7), поэтому она могла быть четной, только если количество слагаемых четно. Значит, в первый год количество семиклассников четно, следовательно, на второй год количество восьмиклассников четно, а количество семиклассников нечетно (их общее количество 75 – нечетное число). Но тогда на второй год сумма шифров семиклассников – нечетное число (сумма нечетного числа нечетных слагаемых), а сумма шифров восьмиклассников – четное число, как сумма четных чисел (оканчивающихся на 8). Значит, эти суммы не могли быть равны. Противоречие.

9.4. Отметим, что треугольники AC_1B_1 и A_1B_1C равны (стороны каждого из них равны половинам сторон треугольника ABC – см. рис. 4). А в равных треугольниках расстояния от центров описанных окружностей до соответственных сторон одинаковы. Значит, точки O_1 и O_3 находятся на одинаковом расстоянии от стороны AC, откуда следует, что прямая O_1O_3 параллельна прямой AC, то есть она параллельна средней линии A_1C_1 треугольника ABC.

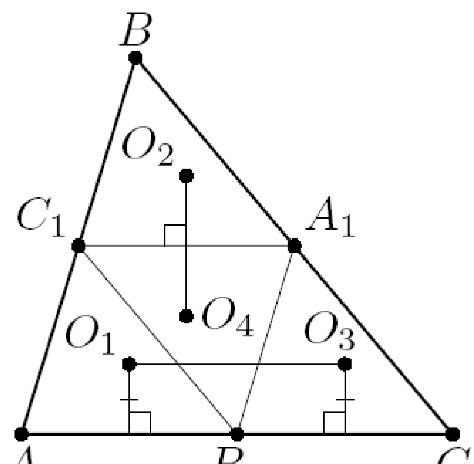


Рис. 4

Центр описанной около треугольника окружности лежит на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Значит, точки O_2 и O_4 лежат на серединном перпендикуляре к общей стороне A_1C_1 треугольников A_1BC_1 и $A_1B_1C_1$. Поэтому прямая O_2O_4 перпендикулярна прямой A_1C_1, а, значит, перпендикулярна прямой O_1O_3. Это означает, что точка O_4 лежит на высоте треугольника $O_1O_2O_3$, проведенной из вершины O_2. Аналогично, она лежит и на других высотах этого треугольника, то есть является точкой пересечения его высот. Утверждение доказано.

9.5. Пусть в классе n мальчиков и k девочек. Вместе девочки подарили мальчикам $1+2+3+\ldots+k = k(k+1)/2$ подарков. Значит, $k(k+1)/2 = an$, где а – количество подарков, которое получил один мальчик, т.е. $k(k+1) = 2an$. Аналогично получаем равенство $n(n+1) = 2bk$, где b – натуральное число.

Перемножив два полученных равенства, получаем: $k(k+1)n(n+1) = 4anbk$, откуда $(k+1)(n+1) = 4ab$. Число в правой части равенства четно, поэтому хотя бы один из сомножителей $k+1$ и $n+1$ – четный. Это означает, что хотя бы одно из чисел k и n нечетно.

10 класс

10.1. Поскольку график пересекает прямые, то $a > 0$. Заметим, что прямая $y = c$ ($c > 0$) пересекает данную параболу в точках, симметричных относительно оси ординат, поэтому данные в условии отрезки имеют длины $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$, где x_1, x_2, x_3 – положительные корни уравнений $ax^2 = 1$, $ax^2 = 2$, $ax^2 = 3$. Следовательно, сумма квадратов длин первых двух отрезков равна $(2x_1)^2 + (2x_2)^2 = 4\cdot\frac{1}{a} + 4\cdot\frac{2}{a} = 4\cdot\frac{3}{a}$. Значит, эта сумма равна квадрату длины третьего отрезка. Утверждение доказано.

10.2. Ответ. $x = 1$, $y = 1$.

Из условия следует, что

$$2\left(2x + \frac{1}{y^2}\right) = \left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(3x + \frac{1}{y^3}\right),$$

то есть $\frac{2}{y^2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y^3}$. Отсюда получаем $2y = y^2 + 1$, то есть $(y-1)^2 = 0$, поэтому $y = 1$. Тогда из условия следует, что числа $x+1, 2x+1, 3x+1$ – последовательные натуральные числа. Значит, $x = 1$.

10.3. Ответ. Одна тройка 2, 5, 7.

Среди трех чисел два – одной четности, поэтому их разность – четна, т.е. может быть простым числом, если это – число 2. Итак, наши числа – это 2, p, $p+2$, а разности – $2, p-2, p$. Но среди чисел $p-2, p, p+2$ одно обязательно делится на 3. А простым такое число может быть, только если это – число 3. Если $p-2=3$, получаем приведенный ответ. Если $p=3$, то $p-2=1$ – не является простым числом. Очевидно, не подходит случай $p+2=3$.

10.4. Треугольники AA_1B и CC_1B подобны по первому признаку ($\angle B$ – общий и $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$ – см. рис. 5). Поэтому $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}$. По свойству биссектрисы угла треугольника, $\frac{A_1K}{C_1K} = \frac{BA_1}{BC_1}$ и $\frac{CL}{AL} = \frac{CB}{AB}$. Значит, $\frac{A_1K}{C_1K} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC} = \frac{AL}{CL}$. Отсюда и следует утверждение задачи.

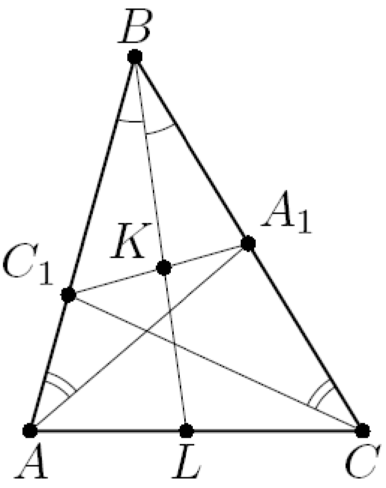


Рис. 5

10.5. Ответ. Не может.

Пусть описанная в условии ситуация возможна. Заметим, что вершин какого-то цвета, например, красного, не больше 5. Тогда количество отрезков, у которых оба конца красного цвета, не больше $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$.

С другой стороны, для каждой вершины A 11-угольника найдутся вершины B и C красного цвета такие, что $AB = AC$. Заметим, что точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, и никакая другая вершина 11-угольника на этом перпендикуляре не лежит. Значит, количество отрезков с концами в вершинах красного цвета должно быть не меньше количества вершин, то есть 11. Противоречие.

11 класс

11.1. Пусть $x<0$, тогда из первого неравенства следует, что $y^3<0$, то есть $y<0$. Далее аналогично $z<0$ и $t<0$. Значит, все четыре числа отрицательны, и их произведение положительно.

Если $x>0$, то из последнего неравенства $t>0$, и далее аналогично $z>0$ и $y>0$, откуда $xyzt>0$.

Если же $x=0$, то тогда из первого неравенства следует, что $y^3<0$, то есть $y<0$. Далее аналогично $z<0$ и $t<0$. После этого из последнего неравенства следует, что $x<0$; противоречие. Итак, случай $x=0$ невозможен.

11.2. Так как прогрессия состоит только из натуральных чисел и содержит два различных числа a и a^2, то она возрастающая. Пусть d – разность прогрессии; тогда $a^2=a+kd$ при некотором натуральном d. Умножая это равенство на a, получаем $a^3=a^2+ak\cdot d$, причём ak – натуральное число; это и означает, что a^3 – тоже член прогрессии.

11.3. Первое решение. Из условия следует, что график $y=f(x)$ касается прямых $y=x-1$ и $y=2-2x$, то есть вписан в угол с вершиной $A(1;0)$ на оси Ox (см. рис. 6).

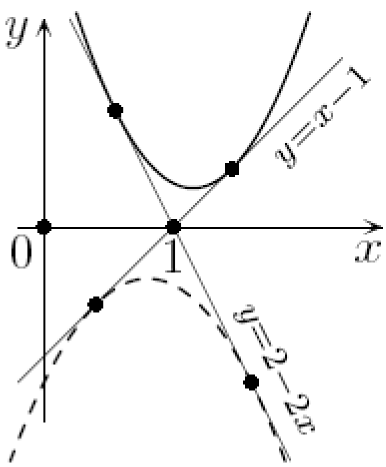


Рис. 6

Но тогда график весь лежит либо выше оси Ox, либо ниже. Из этого и следует, что уравнение $f(x)=0$ не имеет корней.

Второе решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Так как трёхчлены $f(x) - x + 1$ и $f(x) - 2 + 2x$ имеют ровно по одному решению, их дискриминанты обращаются в ноль. Итак, $D_1 = (b-1)^2 - 4a(c+1) = 0$ и $D_2 = (b+2)^2 - 4a(c-2) = 0$. Отсюда $0 = 2D_1 + D_2 = 3b^2 + 6 - 12ac$, то есть дискриминант исходного трёхчлена $D = b^2 - 4ac$ равен -2 и, следовательно, отрицателен.

11.4. Отложим от вершины S трехгранноего угла на его ребрах отрезки длины $\frac{1}{2}$. Получим пирамиду $SABC$, боковые грани которой – равнобедренные треугольники. Но в равнобедренном треугольнике с боковой стороной b и углом при вершине α длина основания равна $2b\sin\frac{\alpha}{2}$ (высота равнобедренного трегольника является одновременно биссектрисой и медианой). Значит, у построенной пирамиды стороны треугольника ABC равны $\sin\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\beta}{2}$ и $\sin\frac{\gamma}{2}$. Утверждение доказано.

11.5. Ответ. Обязательно.

Докажем, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 клетки положительна. Действительно, рассмотрим любой квадрат 2×2. Пусть в нем записаны числа a, b, c, d (см. рис.7). Рассмотрим трёхклеточный уголок с числами a, b, c. Их сумма положительна, значит, по крайней мере одно из них, например, a – тоже положительно. Сумма оставшихся трёх чисел b, c, d квадрата 2×2 также положительна (так как числа стоят в уголке). Значит, сумма всех четырёх чисел квадрата 2×2 положительна.

a	***b***
c	***d***

Рис. 7

Разобьем теперь квадрат 7×7 на квадраты 2×2 и трёхклеточные уголки, как показано на рис. 8. В каждой фигурке сумма чисел положительна. Значит, и сумма чисел во всем квадрате 7×7 положительна.

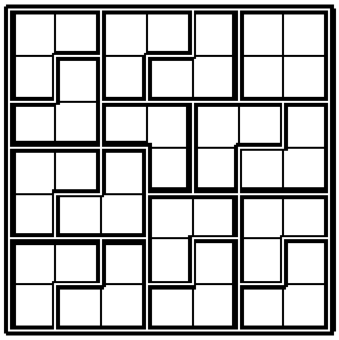


Рис. 8

Замечание 1. Другое решение можно получить, рассмотрев трёхклеточный уголок с вершиной в угловой клетке квадрата 7×7. Либо в угловой клетке, либо в соседней с ней стоит положительное число, а оставшуюся доску (в каждом из случаев) можно разрезать на трёхклеточные уголки. То, что такие разрезания существуют, следует из рисунка 8: в нем квадрат 2×2 можно разрезать на любую клетку и уголок.

Замечание 2. То, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 клетки положительна, можно доказать по-другому. Рассмотрим любой квадрат 2×2. Пусть в нем записаны числа a,b,c,d. Тогда $a+b+c>0$, $a+b+d>0$, $a+c+d>0$, $b+c+d>0$. Сложив все эти неравенства, получим $3(a+b+c+d)>0$, что и требовалось.